

Náhodný vektor
 n -rozměrný

na Ω definováno
 n náhodných
proměnných

X $X_k, k = 1, \dots, n$

Def. $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

$X_1, \dots, X_n$, n. p. na Ω
 n -rozměrný náhodný vektor X
 je uspořádaná n -tice
 $X = (X_1, \dots, X_n)$

Distribuční fce náhodného
vektoru $F: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$

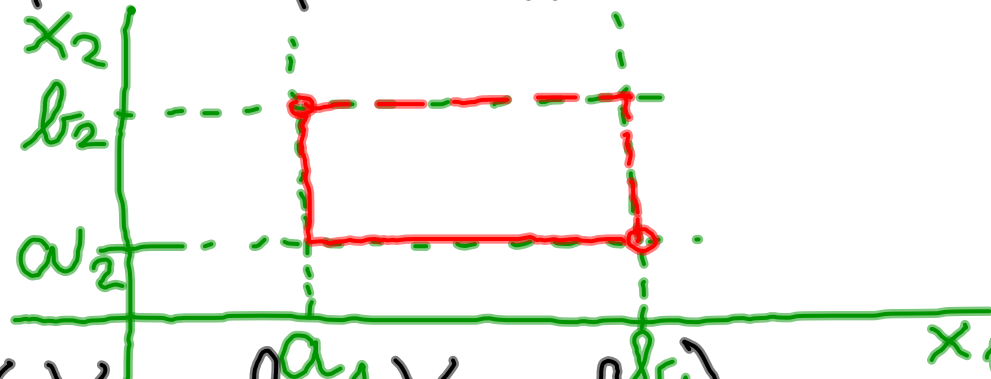
$$F(x_1, \dots, x_m) = P(\{w \in \Omega \mid \underbrace{X_1(w) \leq x_1, \dots, X_m(w) \leq x_m}_{\text{v smyslu prvků}}\})$$

Také
souvěšená
distribuční
fce n. p. $X_1, \dots, X_m$

$P(X_1 \leq x_1, \dots, X_m \leq x_m)$
v smyslu prvků

$$\underline{n = 2}$$
$$X = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X & Y \end{pmatrix}$$

$$P(a_1 \leq X_1 < b_1, a_2 \leq X_2 < b_2) =$$



$$\begin{aligned}
 &= P(X_1 < b_1, X_2 < b_2) \\
 &\quad - P(X_1 < a_1, X_2 < b_2) - P(X_1 < b_1, X_2 < a_2) \\
 &\quad + P(X_1 < a_1, X_2 < a_2) \\
 &= F(b_1, b_2) - F(a_1, b_2) - F(b_1, a_2) \\
 &\quad + F(a_1, a_2)
 \end{aligned}$$

Náhodný vektor má rozdělení
diskrétního typu $X = (X_1, X_2)$

konečná, spočetná množina

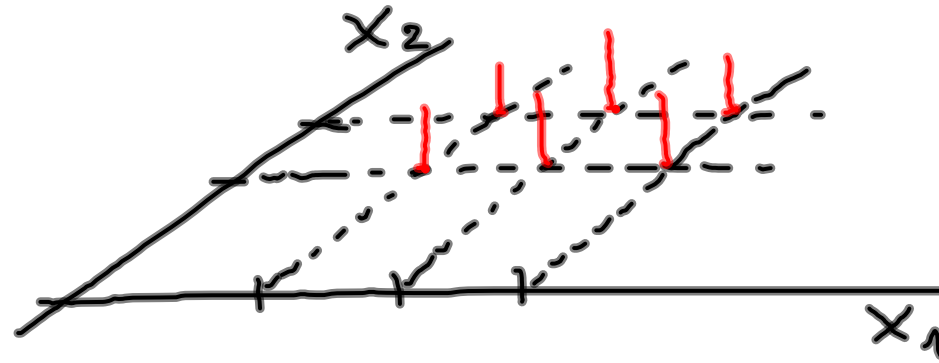
$$(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$$

$$P(X_1 = x_1, X_2 = x_2) > 0$$

a

$$\sum_{x_1} \sum_{x_2} P(X_1 = x_1, X_2 = x_2) = 1$$

součet pravděpodobností
funkce



$n.v.$ má rozdělení spojitého
 typu, existuje-li
 nezáporná reálná funkce

$$f(x_1, x_2) \quad x_1, x_2$$

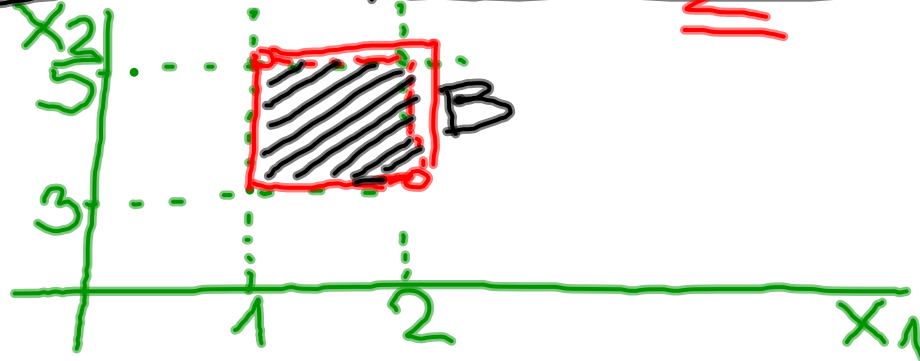
$$F(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} f(\underline{t_1}, t_2) dt_1 dt_2$$

$f \dots$ sdružená hustota
 n. p. x_1, x_2

Pr. $X = (X_1, X_2)$

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} e^{-x_1 - x_2} & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

$\mathbb{P}(1 \leq X_1 < 2, 3 \leq X_2 < 5) = ?$



$$\begin{aligned}
 &= \int_1^2 \int_2^5 e^{-x_1-x_2} dx_1 dx_2 = \\
 &= \int_1^2 \left(\int_2^5 e^{-x_1-x_2} dx_2 \right) dx_1 = \\
 &= \int_1^2 \left[-e^{-x_1-x_2} \right]_2^5 dx_1 = \\
 &= \int_1^2 \left(e^{-x_1-2} - e^{-x_1-5} \right) dx_1
 \end{aligned}$$

Handwritten annotations: Red numbers 1, 2, 3, 5 are placed near the integration limits. Green arrows indicate the order of integration: first with respect to x_2 (from 2 to 5), then with respect to x_1 (from 1 to 2). The final expression is underlined.

$$= \underline{\bar{x}^7 - \bar{x}^6 - \bar{x}^5 + \bar{x}^4}$$

Charakteristiky náhodných vektorů

 (X, Y) $h(X, Y)$ $\underbrace{X+Y}$

V: Necht (X, Y) je m.v.
s diskretním rozdělením,
 (x_i, y_j) s pravd. $p(x_i, y_j)$

$$\underline{h: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}}$$

$$\text{Potom: } E(h(X, Y)) = \underbrace{\sum_{i,j} h(x_i, y_j) p(x_i, y_j)}$$

V: (X, Y) spojité
 $f(x, y)$
 $h(x, y)$ spojitá

Polom: $E[h(x, y)] =$
 $= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(x, y) f(x, y) dx dy$

Pr. (X, Y) je spojité

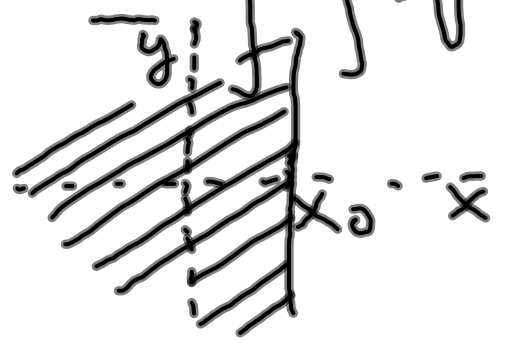
$$\begin{aligned}
 h(X, Y) &= X \\
 E[h(X, Y)] &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x f(x, y) dx dy \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} x f(x, y) dy \right) dx = E(X) \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} x \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy \right) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx
 \end{aligned}$$

~~$f_X(x)$~~ hustota X

Marginální rozdělení
rozdělení pravděpodobnosti
jednotlivých náhodných
proměnných

marginální hustota n. p. X
 $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy$

$$\begin{aligned}\underline{F_X(x_0)} &= P(X < x_0) \\ &= P(\underbrace{-\infty < X < x_0, -\infty < Y < \infty}_{X < x_0})\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\iint f(x, y) dx dy &= \\ &= \int_{-\infty}^{x_0} \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy \right)}_{f_X(x)} dx\end{aligned}$$

V: X, Y $E(X), E(Y)$

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$$

$$\begin{aligned}
 \underline{E(X+Y)} &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{(x+y) f(x,y)}_{x f(x,y) + y f(x,y)} dx dy \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{x f(x,y)}_{\text{}} dx dy + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{y f(x,y)}_{\text{}} dx dy \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} x \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) dy \right) dx + \int_{-\infty}^{\infty} y \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) dx \right) dy \\
 &= \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) dy \right)}_{f_X(x)} dx}_{E(X)} + \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} y \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) dx \right)}_{f_Y(y)} dy}_{E(Y)}
 \end{aligned}$$

kovariance náhodných
proměnných X a Y

$$\text{cov}(X, Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))]$$

$$\begin{aligned}\text{cov}(X, X) &= E[(X - E(X))^2] \\ &= D(X)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{cov}(X, Y) &= E[(X - E(X))(Y - E(Y))] \\
 &= E[XY - \underbrace{XE(Y)}_{aE(Y)} - YE(X) + E(X)E(Y)] \\
 &= E(XY) - E(X)E(Y) \\
 &\quad - EYEX + E(X)E(Y) \\
 &= E(XY) - E(X)E(Y)
 \end{aligned}$$

$E(aX) = aE(X)$