Ω

$A, B \subset \Omega$

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

A, B nezávislé

Skupinová nezávislost

$A_1, \dots, A_n$ vzájemně nezávislé

$1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_r \le n$

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_r}) =$$

$$= P(A_{i_1}) P(A_{i_2}) \dots P(A_{i_r})$$

Př. V osudí 4 lístky 4, 9, 25, 30

A ... číslo dělitelné 2 $A = \{4, 30\}$

B ... –||– 3 $B = \{9, 30\}$

C –||– 5 $C = \{25, 30\}$

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{2}$$

$A \cap B$

$A \cap C$ $\{30\}$

$B \cap C$

$P(A)P(B)$

$P(A)P(C)$

$P(B)P(C)$

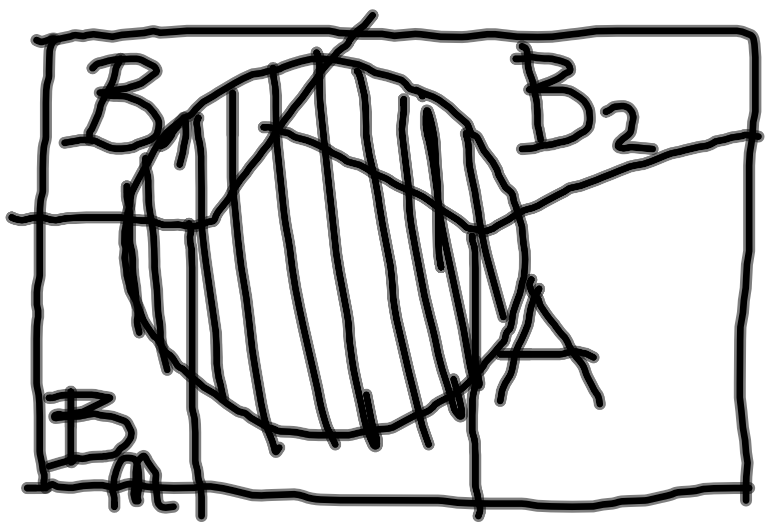
$$P(A \cap B) = P(A \cap C) = P(B \cap C) = \frac{1}{4} =$$

$$\underbrace{P(A \cap B \cap C)}_{\{30\}} = \frac{1}{4} \neq \underbrace{P(A)P(B)P(C)}_{\frac{1}{8}}$$

Věta o úplné pravděpodobnosti:

Nechť $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} B_i$, $P(B_i) > 0$,

$i = 1, \dots, n$, B_i navzájem disjunktní



$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i) P(A|B_i)$$

Důkaz: $A = \bigcup_{i=1}^{n} (B_i \cap A)$, $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$

$B_i \cap A$ navzájem disjunktní

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{P(B_i \cap A)}_{P(B_i)P(A|B_i)} \quad \square$$

Př. 10 osudí, v každém 10 koulí,
v i-tém i černých
10-i bílých koulí

náhodně vyberu osudí,
z něj náhodně vyberu kouli
? P, že vyberu černou k.

A … vytažena černá koule

B_i … vybereme i-té osudí
(i černých koulí)

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A|B_i)=$$

$$P(B_i)=\frac{1}{10} \quad P(A|B_i)=\frac{i}{10}$$

$$\sum_{i=1}^{10} \frac{1}{10}\frac{i}{10} = $$

$$= \underline{\underline{0{,}55}}$$

Bayesova formule:

$$\frac{P(B_j \cap A)}{P(A)}$$

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{n} B_i,\ P(A) > 0,\ P(B_i) > 0$$

$i = 1, \dots, n$, B_i navzájem disjunktní

$$\forall j \quad P(B_j|A) = \frac{\overbrace{P(B_j)P(A|B_j)}^{P(B_j \cap A)}}{\underbrace{\sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A|B_i)}_{P(A)}}$$

Př. 3 osudí,
v 1. 4 červené, 3 bílé koule
v 2. 5 bílých, 2 modré
v 3. 7 modrých, 3 červené
z některého osudí vybrána bílá
P, že byla vybrána z 1. osudí ?

A ... vybrána bílá koule

B_i ... vytažena z i-tého osudí

$$P(B_1|A) = \frac{\overbrace{P(B_1)}^{\frac{1}{3}}\,\overbrace{P(A|B_1)}^{\frac{3}{7}}}{\underbrace{P(B_1)}_{\frac{1}{3}}\,\underbrace{P(A|B_1)}_{\frac{3}{7}} + \underbrace{P(B_2)}_{\frac{1}{3}}\,\underbrace{P(A|B_2)}_{\frac{3}{7}} + \underbrace{P(B_3)}_{\frac{1}{3}}\,\underbrace{P(A|B_3)}_{0}}$$

$$= \frac{3}{8}$$

n-násobné <u>nezávislé</u> opakování

Ω, $A \subset \Omega$, $P(A) = p$

B ... při n-násobném nez. op. nastane jev A právě k-krát

$$P(B) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Bernoulliho schéma

v prvních $\underline{k}$ pokusech A nastane

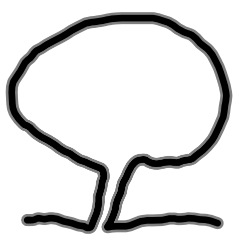
zbývajících $\underline{n-k}$ nenastane

$$p^k (1-p)^{n-k}$$

$$\underbrace{\frac{n!}{k!\,(n-k)!}}_{\binom{n}{k}} \qquad \underbrace{A\ A\ \dots\ A}_{k}\ \underbrace{\neg A\ \dots\ \neg A}_{n-k}$$

Axiomatická teorie pravděpodobnosti

Kolmogorov, 1933



Házení kostkou

mám informaci pouze o tom, jestli padlo sudé – liché číslo

$\emptyset, \Omega, \{2,4,6\}, \{1,3,5\}$

$\Omega_1 = \{S, L\}$

Def. Nechť Ω je neprázdná množina, $\mathcal{S}$ je systém podmnožin množiny Ω.

$\mathcal{S}$ je σ-algebra :

$$\left.\begin{array}{l}
\text{(i) } \Omega \in \mathcal{S} \\
\text{(ii) } A \in \mathcal{S} \Longrightarrow \overline{A} = \Omega \setminus A \in \mathcal{S} \\
\text{(iii) } A_n,\ n = 1, 2, \dots \ \ A_n \in \mathcal{S} \Longrightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{S}
\end{array}\right\}$$

(iv) $\emptyset \in \mathcal{S}$ $\qquad \emptyset = \overline{\Omega}$

(v) $A, B \in \mathcal{S} \implies \left.\begin{array}{l} A \cup B \\ A \cap B \\ A \setminus B \end{array}\right\} \in \mathcal{S}$

(vi) $A_n \in \mathcal{S},\ n = 1, 2, \ldots \qquad \bigcap_{i=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{S}$

Def. Pravděpodobnost je zobrazení

$$P : \mathcal{S} \longrightarrow [0,1],$$

kde $\mathcal{S}$ je σ-algebra podmnožin množiny Ω, pro které platí

(i) $P(\Omega) = 1$

(ii) $A_n,\ n = 1,2,\dots\ A_n \in \mathcal{S},\ A_n \cap A_m = \emptyset$
$n \neq m$

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

σ-aditivita

$(\Omega, \mathcal{S}, P)$ pravděpodobnostní prostor