Rozptyl (disperse)

$$E(X) = E(Y)$$

$$D(X) = E\left[\underbrace{(X - E(X))}^{2}\right]$$

Funkce náhodných proměnných

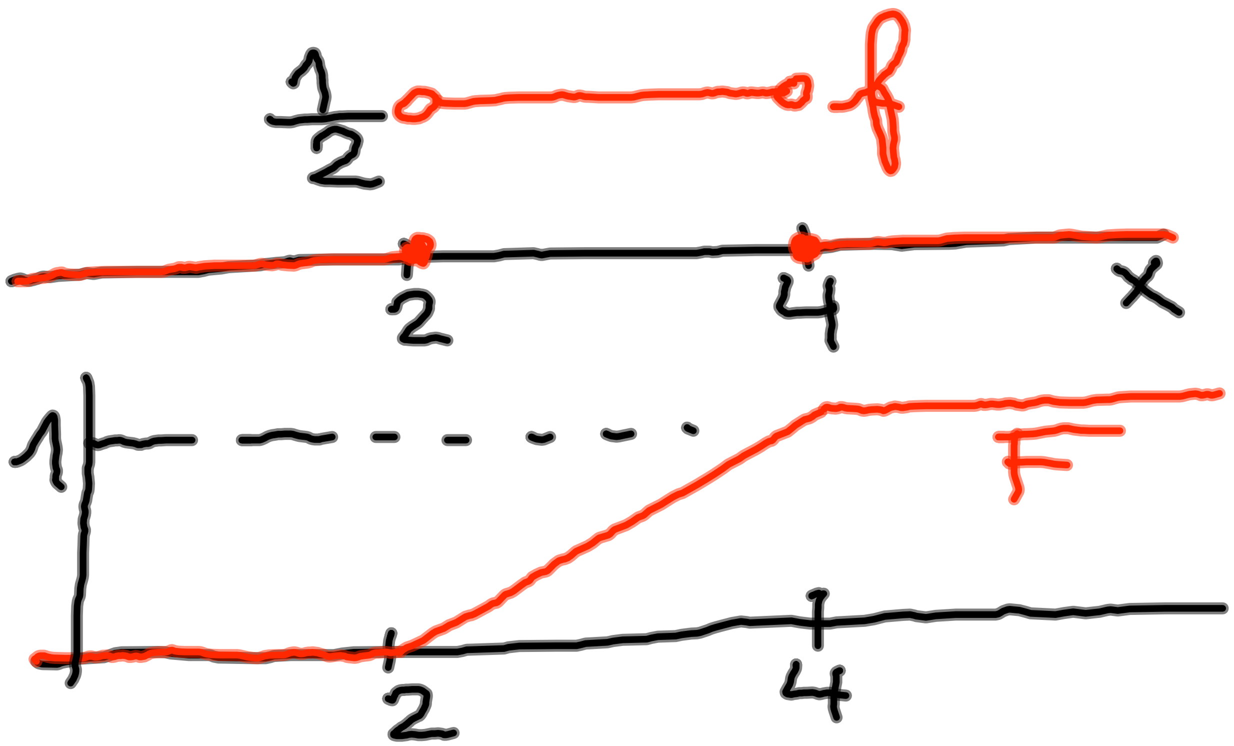
X … náhodná proměnná

$Y = h(X)$

Př. X … počet leček

$Y = X^2$

<u>Př.</u> X má rovnoměrné rozdělení na $(2,4)$



$Y = X^2$

?

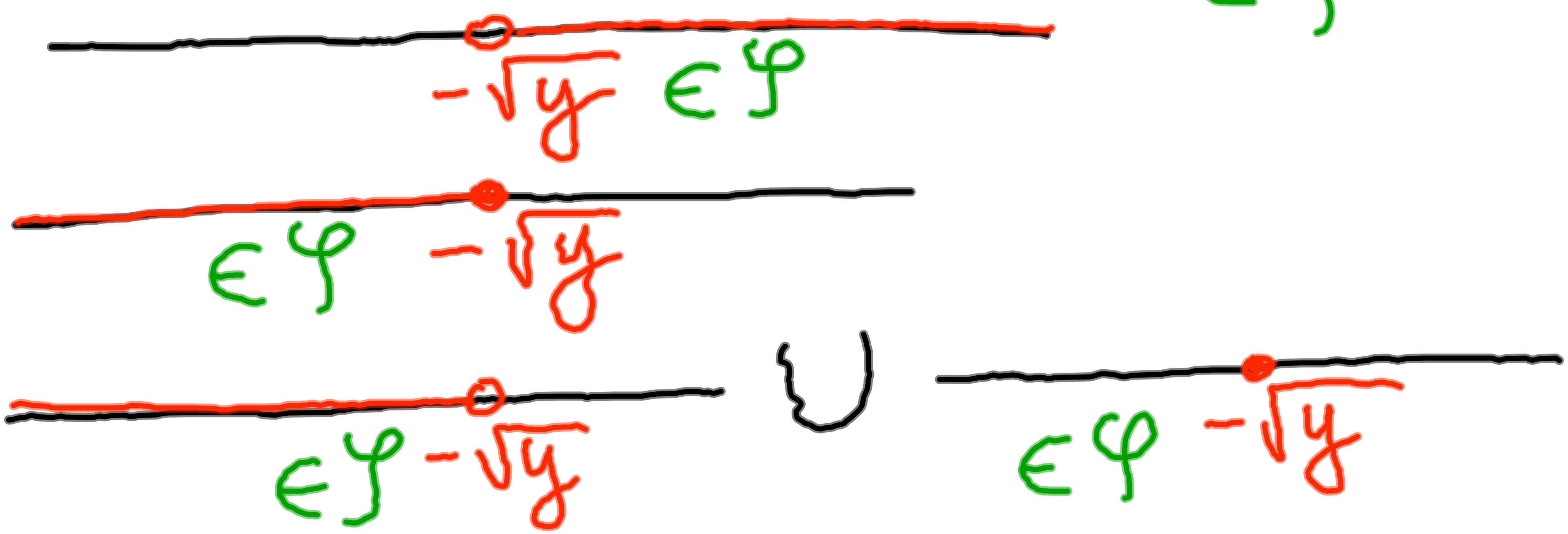
$$\forall y \in \mathbb{R}: \quad \underbrace{\{\omega \in \Omega \mid \underbrace{X^2(\omega)}_{Y(\omega)} < y\}} \in \mathcal{S}$$

$y \leq 0$ $\qquad \emptyset \in \mathcal{S}$

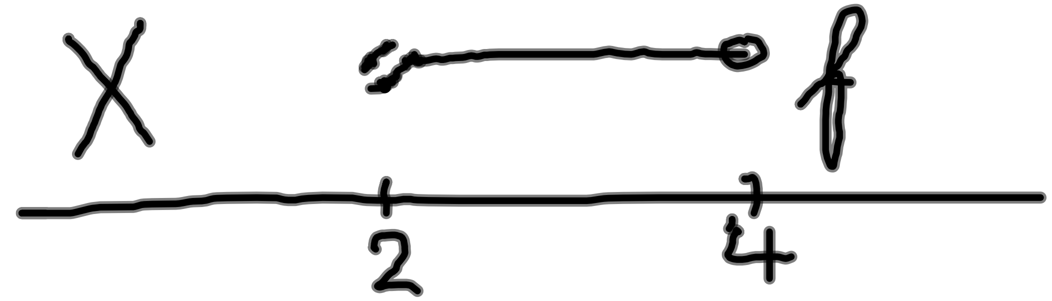
$y > 0$ $\qquad \{\omega \in \Omega \mid \underbrace{X^2(\omega) < y}_{-\sqrt{y} < X(\omega) < \sqrt{y}}\} \in \mathcal{S}$

$$= \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) < \sqrt{y}\} \in \varphi$$

$$\cap \underbrace{\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) > -\sqrt{y}\}}_{\in \varphi}$$



$$\underbrace{X^2}_{Y}$$



G … distribuční funkce náh. proměnné Y

$y \in R$ $\quad G(y)$

$y \le 0$ $\quad G(y) = 0$

$0 < y \le 4$ $\quad G(4) = P(\underbrace{Y<4}_{-2<X<2}) = 0$

$$4 < y \le 16$$

$$G(y) = P(Y<y) = P(-\sqrt{y} < X < \sqrt{y}) =$$

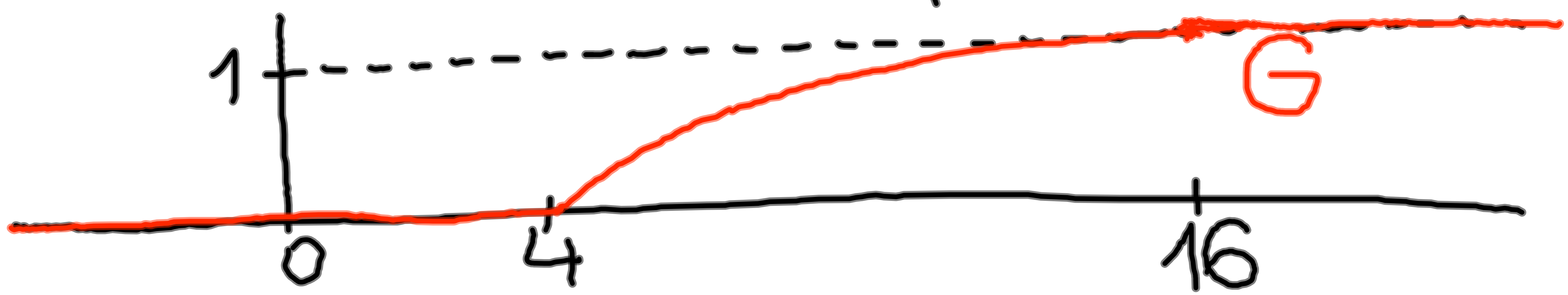
$$= P(2 < X < \sqrt{y}) =$$

$$= \int_2^{\sqrt{y}} \frac{1}{2}\,dx = \frac{1}{2}\left[x\right]_2^{\sqrt{y}} =$$

$$= \boxed{\frac{1}{2}\sqrt{y} - 1}$$

$y > 16$

$$G(y) = P(Y < y) = P(-\sqrt{y} < X < \sqrt{y})$$
$$= 1$$



$$G(y) = \frac{1}{2}\sqrt{y} - 1$$

hustota

$$g(y) = \frac{dG}{dy} = \begin{cases} 0 & y < 4 \\ \frac{1}{4\sqrt{y}} & 4 < y < 16 \\ 0 & y > 16 \end{cases}$$

$$G(y) = \frac{1}{2}\sqrt{y} - 1$$

$$g(y) = \frac{dG}{dy} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{2\sqrt{y}} = \frac{1}{4\sqrt{y}}$$

$E(Y)$

SAMI: X rovnoměrné rozdělení na $(-1,2)$
$Y = X^2$

$$D(X) = E\big[\underbrace{(X-E(X))^2}\big]$$

X^2

$a \in \mathbb{R}$

$(X-a)^2$

$(X-E(X))^2$ je náhodná proměnná

$$\underbrace{(X-E(X))^2} \qquad g(x)$$

<u>Platí:</u> diskrétní

$$D(X)=\sum_i (x_i-E(X))^2 p_i$$

spojitá

$$D(X)=\int_{-\infty}^{\infty}(x-E(X))^2 \underbrace{f(x)}\,dx$$

$\sqrt{D(X)}$ směrodatná (střední kvadratická) odchylka

Věta: X spojitá n. p. s hustotou f

$h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ taková, že

$\underbrace{h \circ X}_{h(X)}$ je náhodná proměnná

$$E[h(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} h(x) f(x)\, dx$$

Důsledek:

X ... spojitá, $E(X)$, hustota f

$$h(X) = aX + b$$

$$E(aX+b) = \int_{-\infty}^{\infty} (ax+b) f(x)\,dx =$$

$$= a \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx}_{E(X)} + b \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx}_{=1} = \underline{aE(X)+b}$$

$$D(aX+b)=E\Big[\underbrace{\big(aX+b-(aE(X)+b)\big)^2}_{\underbrace{(aX-aE(X))^2}_{a^2(X-E(X))^2}}\Big]$$

$$=a^2\,\underbrace{E\big[(X-E(X))^2\big]}_{D(X)}$$

$$=\boxed{a^2D(X)}$$

$$h(X)$$

$$E\left[h(X)\right] = \sum_i h(x_i) P(X = x_i)$$

$$E\left[aX + b\right] = aE(X) + b$$

Důsledek 2:

X ... n. p.

$E(X) = a$

$\sqrt{D(X)} = \sigma$

$$U = \frac{X - a}{\sigma}$$

Platí:

$$E(U) = 0$$
$$D(U) = 1$$

$$E(kX) = kE(X$$

$$U = \frac{X-a}{\sigma}$$

$$E(U) = E\left(\frac{X-a}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma}\underbrace{E(X)}_{a} - \frac{a}{\sigma} = \; = 0$$

$$D(U) = E\Bigg[\overbrace{\left(\frac{X-a}{\sigma} - 0\right)^2}^{\left(\frac{X-a}{\sigma}\right)^2}\Bigg] =$$

$$= \frac{1}{\sigma^2}\overbrace{E\Big[\underbrace{(X-a)^2}_{(X-E(X))^2}\Big]}^{D(X)} = 1$$

Kvantily

α-kvantil, x_α

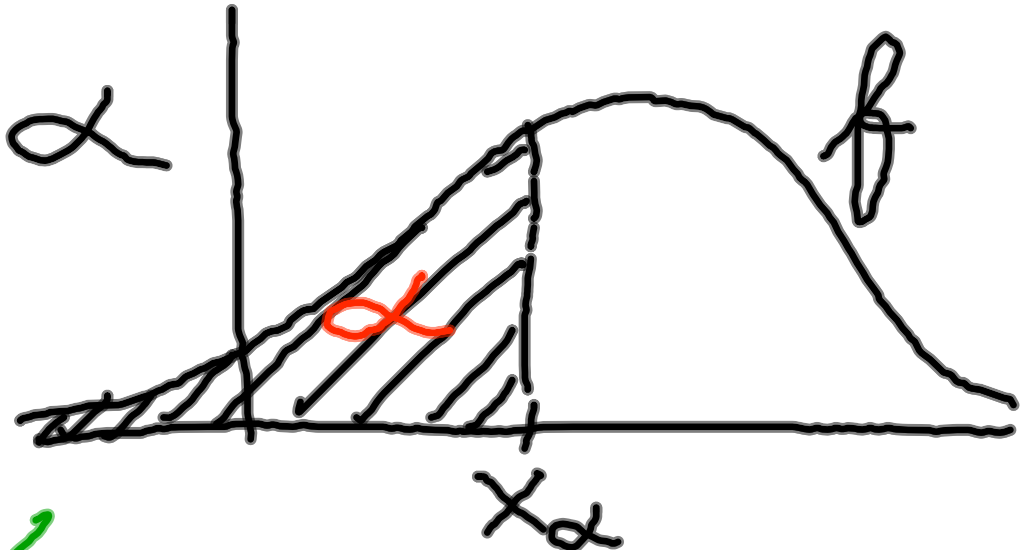
$\alpha \in (0,1)$

X n. p. spojitá, její distribuční funkce F je rostoucí na intervalu těch $x \in \mathbb{R}$, pro která $0 < F(x) < 1$

$\Rightarrow x_\alpha$ určen jednoznačně

x_α

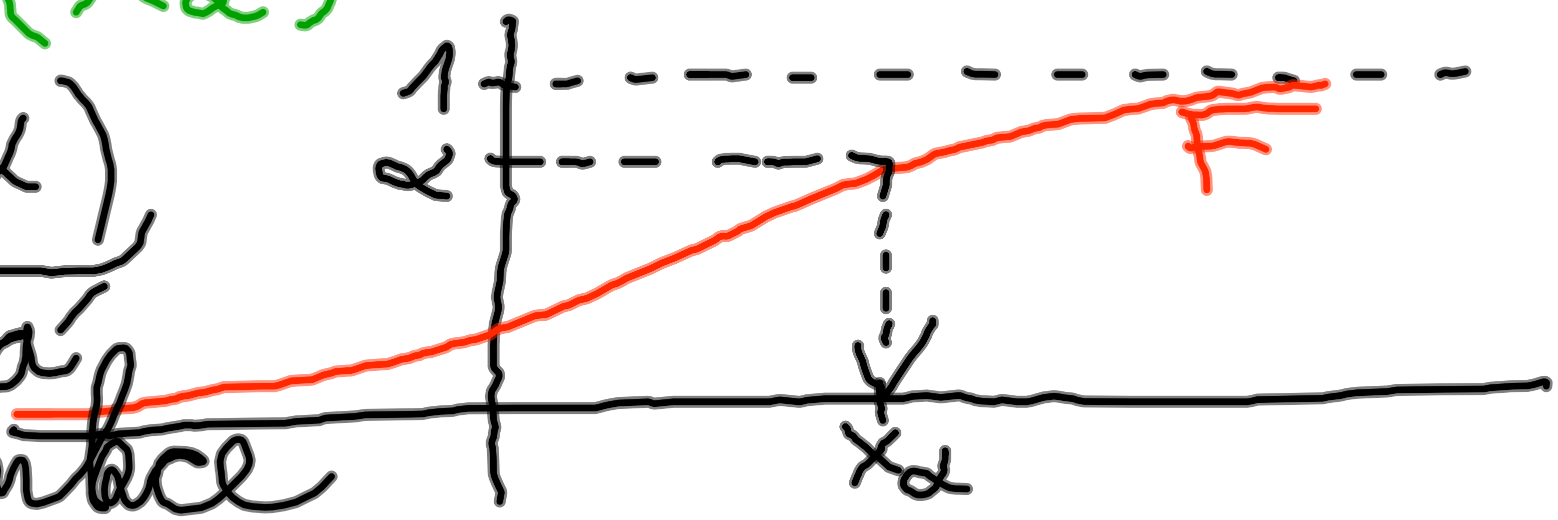
$P(X < x_\alpha) = \alpha$



$x_{0,5}$ medián

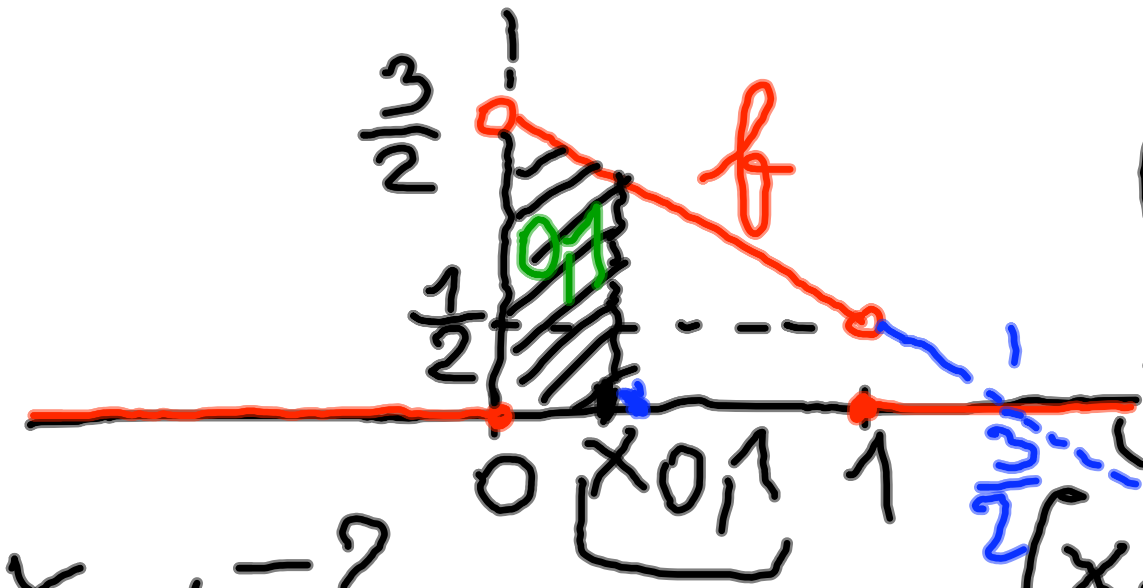
$F(x_\alpha) = \alpha$

$x_\alpha = \underbrace{F^{-1}(\alpha)}_{\text{kvantilová funkce}}$



Př. X má hustotu

$$f(x)=\begin{cases}\frac{3}{2}-x & 0<x<1\\ 0 & \text{jinak}\end{cases}$$



$$\int_0^{x_{0,1}}\left(\frac{3}{2}-x\right)dx=0{,}1$$

$$x_{0,1}^2-3x_{0,1}+0{,}2=0$$

$x_{0,1}=?$

$x_{0,5}$

$x_{0,25}$ ... dolní kvartil

$x_{0,75}$ horní kvartil

$x_{0,75} - x_{0,25}$ mezikvartilové rozpětí (variability)